优化教学设计　促进深度学习

——以概念教学“函数的奇偶性”为例*

侯　斌　（江苏省无锡市滨湖区教育研究发展中心　214072）
万金珠　（江苏省太湖高级中学　214125）

摘　要　数学概念是进行数学推理、判断的依据，也是形成数学思想方法的出发点，因此概念学习是数学学习的基础[1]. 概念教学要让学生感知概念的生成，要向学生揭示概念的本质属性，更要深入挖掘概念本身和探索过程中所承载的思想方法. 概念教学中，教师应着力优化教学设计以促使学生深度学习的发生.

关键词　深度学习；概念教学；教学设计
文章编号　1004-1176(2022)09-0030-04

《数学课程标准》明确指出：中学数学课堂教学应揭示数学的本质，重视知识的生成和发展过程及其背后的思想. 但当前很多教师的概念教学仍旧是“一个定义，几点注意”，与新课标的要求相去甚远. 课堂教学不能仅仅是陈述事实，更重要的是探索过程以及在此过程中所表现出来的理性和科学精神. 笔者今年上了一节题为“函数的奇偶性”的大市公开课，通过反复磨课和评课，对于概念教学中如何进行教学设计以更好地促进学生的深度学习有了更深的体会. 现将这节课的教学设计和实施过程进行整理和反思，敬请同行专家批评指正.

1　教学呈现与设计说明

1.1　情境引入

问题 1　如图 1，剪纸是中国的传统民间艺术，图案漂亮却很复杂，怎样剪省时省力？（折叠）

图 1

问题 2　剪出来的图形是一种怎样的美？（对称美）

问题 3　它们分别对应我们数学中的哪种对称关系？（轴对称和中心对称）

问题 4　哪些函数图象也具有类似的对称性？怎样判断图象的对称性？

学生举例，如：$f(x)=x$，$f(x)=x^2$ 等具有对称性，根据图象运用轴对称和中心对称的定义判断其对称性.

问题 5　函数 $f(x)=x^3+x$ 的图象具有对称性吗？

（学生沉默……）

问题 6　在研究函数单调性时我们有没有遇到过类似的困难？当时是怎样解决的？

学生联想到类比研究单调性的方法，尝试用数量刻画函数的对称性.

设计意图　由剪纸引出生活中的对称性，激发学生的学习兴趣；再将对称这个概念从生活中迁移到数学中. 设置问题 5 引发认知冲突，从而激发学生对新知的探求欲，而问题 6 类比单调性从“形”转化到“数”的研究方法，既连接了新旧知识，也为用数量刻画对称性作好铺垫.

1.2　概念构建

探究一　量化对称，初识“任意”

完成表格：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x)=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$f(x)=\lvert x \rvert$	…	3	2	1	0	1	2	3	…

画出图象：

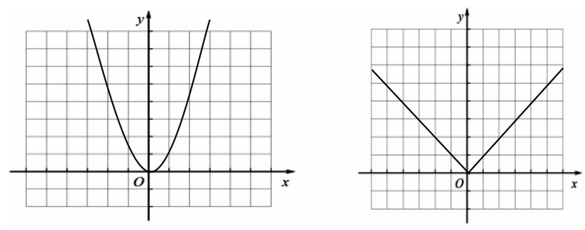

图 2

---

*本文系江苏省教育规划“十三五”重点课题“促进深度学习的高中数学内隐性课程资源开发”(B-b/2020/02/167)、江苏省教育规划“十三五”重点课题“大概念视角下的高中数学单元整体教学实践研究”(B/2021/02/28)的研究成果.

问题 1　图象有何共同特征?(关于 y 轴对称)

问题 2　仔细观察表格中的数量特征,发现了什么规律? 有何结论? ($f(-1)=f(1)$, $f(-2)=f(2)$, $f(-3)=f(3)$, $\cdots$, 归纳得 $f(-x)=f(x)$)

问题 3　自变量取一对相反数时,对应函数值相等.结论是否具有一般性? 可否证明?

设计意图　用函数的三种表示方法分别尝试刻画函数对称性,在对比过程中学生发现:列表法刻画对称性不够完善,不能取尽所有的数值;图象法不够严谨;唯有解析法能精确地刻画函数的数量关系,因此尝试用解析式刻画对称性.在此过程中渗透特殊到一般、数形结合的数学思想.学生在直观感知图象性质、寻找特值关系的过程中,逐步认识"任意 x"的必要性.

探究二　几何演示,理解"任意"

问题 1　教师用GeoGebra演示点 P 在 $f(x)=x^2$ 图象上运动,提问图象由什么元素构成?(点)

问题 2　图象关于 y 轴对称的实质是什么?(点关于 y 轴对称)

问题 3　点 P 在图象上,关于 y 轴对称的点 P' 在哪里?(仍在图象上)

问题 4　图象上任取一点 $P(x_0,f(x_0))$,则点 $P(x_0,f(x_0))$ 关于 y 轴对称的点 P' 的坐标是什么?($P'(-x_0,f(x_0))$)

问题 5　点 P' 也在函数图象上,坐标还能怎样表示?($P'(-x_0,f(-x_0))$)

问题 6　两种方式都表示点 P',可以得到什么结论?($f(-x_0)=f(x_0)$)

问题 7　反之,若 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立,如何理解这个等式?(横坐标互为相反数时,相应的两个函数值相等,即点关于 y 轴对称.[2])

问题 8　我们将具有以上特征的函数称为偶函数,能用符号语言概括偶函数的定义吗?($\forall x\in \mathbf{R}$, $f(-x)=f(x)$)

设计意图　用点坐标刻画函数的性质是研究形的基本方法.通过对点坐标的研究把几何问题代数化,使学生理解两个"任意":一是图形的对称性对任意点都成立;二是任意关于 y 轴对称的图形都有该数量关系.

探究三　抽象概括,揭示特征

问题 1　图象关于 y 轴对称具有一般性,定义域一定为 $\mathbf{R}$ 吗?(不一定.不妨设定义域为 I, $\forall x\in I$, $f(-x)=f(x)$)

问题 2　如果在 $f(x)=x^2$ 的图象上去掉点 $(1,1)$,图象还关于 y 轴对称吗? 定义域取 $[-3,2]$ 呢?(都不是轴对称图形)

问题 3　那么我们对偶函数又有什么新的认识?(偶函数的定义域关于数 0 对称)

问题 4　能完善偶函数的抽象定义吗?($\forall x\in I$,都有 $-x\in I$ 且 $f(-x)=f(x)$)

设计意图　通过分析、观察、归纳得偶函数的定义是本节课的核心部分,充分引导学生发现和归纳定义域的特征,有利于学生丰富和完善偶函数的概念,加深对定义的理解.

探究四　概念形成,深化理解

类比偶函数的定义,请学生以小组为单位,以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为例,合作探究奇函数的定义.

如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数,则称函数 $f(x)$ 具有奇偶性.

问题 1　归纳奇函数与偶函数的异同点:

	偶函数	奇函数
定义域	关于数 0 对称	
图象(形)	关于 y 轴对称	关于原点中心对称
定义(数)	$\forall x\in I$,都有 $-x\in I$,且 $f(x)=f(-x)$	$\forall x\in I$,都有 $-x\in I$,且 $f(x)=-f(-x)$

问题 2　如何说明一个函数不是偶函数?

不是偶函数只需满足"$\exists x\in I$, $-x\notin I$"或"$\exists x\in I$,有 $f(-x)\neq f(x)$".因此,用自然语言描述:定义域不关于数 0 对称或举特例说明,如 $f(-1)\neq f(1)$.

问题 3　判定奇偶性的方法和步骤是什么?

方法:图象法和定义法.步骤:① 看(定义域);② 找(等量关系);③ 下结论.

设计意图　让学生通过类比独立推导奇函数的定义,培养其创新能力和探索意识.从四种命题的角度来看,若"函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\in I$,都有 $-x\in I$,且 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 是一个偶函数"为真命题,则逆否命题"若函数 $f(x)$ 不是偶函数,则 $\exists x\in I$,有 $-x\notin I$ 或 $f(-x)\neq f(x)$"也为真命题.处理时不用过多强调,只需理清逻辑关系.

1.3　概念应用

例　(1) 判断函数 $f(x)=5x$ 的奇偶性;

(2) 函数变成 $f(x)=5|x|$,$f(x)=5x^2$,$x\in[-1,2]$ 呢?

问题 1　是否存在既奇又偶的函数呢?(比如 $y=0$)

问题 2　根据奇偶性可以将函数分为哪几类?

设计意图　使学生掌握判断奇偶性的步骤以及图象法、特值法、定义法等几种判断方法.

1.4　拓展提升

思考:(1) 图 3 是函数 $f(x)=x^3+x$ 图象的一部分,你能根据奇偶性画出函数在 y 轴左边部分的图象吗?

(2) 想一想:能否通过添加项使函数 $f(x)=x^3+x$ 仍是奇函数? 非奇非偶函数? 偶函数? 既奇又偶函数?

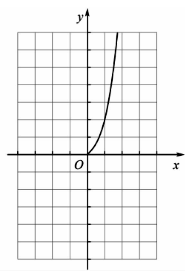

图 3

设计意图　(1)与解决情境提出的问题前后呼应,判断函数的奇偶性后自然得出图象的对称,体现了学习奇偶性的必要性.(2)是对教材思考题的改编,添加项的探究让学生在课堂上进行操作,学生利用大屏上的 GeoGebra 操作寻找规律,促进对奇偶性概念的深度理解.

2　教学感悟

2.1　情境唤醒——联想与结构

本课是学生继函数单调性之后第二次接触到用代数方法刻画函数的几何特征(对称性),对他们而言探索思路和研究方法还比较陌生.教师通过具有中国传统文化色彩的剪纸艺术引入生活中的对称性,引导学生联想到函数图象中的对称性,将生活经历与本课所学相联系,使知识具体化.情境引入问题 6 的目的是唤醒学生以往的学习经验,联想到函数单调性中曾经学习过的用代数方法刻画几何特征,当“形”不能解决时,转为“数”的定量刻画.在融入以往的学习经验之后,学生就可能产生联想:想到类比单调性的研究方法来研究函数的奇偶性.学生经过两次联想之后,知识就有了生长的根基.本课所学习的关于奇函数和偶函数的定义、非偶函数和非奇函数的概念、判断函数奇偶性的方法和步骤这些相关知识细碎又庞杂,教师通过探究四的问题 1~3 这三个问题指导学生梳理、建构知识体系,使枝干清晰、细节丰满[3].而学生根据当前的学习活动去激活以往的经验,以融会贯通的方式对学习内容进行组织从而建立自己的知识结构,这正是深度学习的特征之一.

2.2　探究促进——活动与体验

在概念教学中,教师应该关注以学生为主体的主动活动是否充分、学生是否充分感知到概念的产生和发展、学生在活动中有怎样的学习体验,以及除了知识以外有没有体会到更深刻的学科思想方法.本课基于学生的活动和体验进行探究设计,情境引入的问题 5 通过引发认知冲突从而激发学生对所学内容的求知欲,有效激发学生的学习兴趣.在概念构建部分,探究一让学生体会解析法刻画函数对称性的必要性;探究二揭示了函数关于 y 轴对称所满足的恒等关系;探究三揭示定义域的对称性并完善了偶函数的定义;探究四则是由学生自主探索得到奇函数的定义并深化对奇偶性概念的理解.在探究过程中,学生亲历概念的发现、形成、发展的过程,通过活动与体验主动建构知识体系,发展了数学抽象、逻辑推理等核心素养.而学生的活动与体验正是深度学习的学习机制,也是深度学习的特征之一.

2.3　问题驱动——本质与变式

深度学习的着眼点在于教师通过怎样的方式引导学生掌握知识的本质.这节课上,教师以有效提问为抓手帮助学生搭建认知的阶梯,进而把握概念的本质.教师通过探究二的问题 1 和问题 2 向学生揭示研究函数图象性质的一般思路:用点坐标来研究函数性质.仍旧是在探究二部分,教师通过问题 3~6 构成的问题串一气呵成,得到了奇函数所满足的恒等式,至此概念本质即奇函数的定义呼之欲出.变式也是帮助学生形成正确概念的必经之路,比如探究三的问题 1,教师通过变式进行追问,引导学生进一步反思偶函数定义域的特征;问题 2 则给出定义域非对称的变式,学生在正反对比中发现、归纳出偶函数的定义域关于数 0 对称.教师通过问题串、追问的形式以及正反变式进行举例,引导学生全面把握知识之间的内在联系.学生形成对学习对象进行深度加工的意识与能力,把握知识本质,并能在本质基础上进行变式,也是深度学习的特征之一.

2.4　任务引领——迁移与应用

知识要通过迁移和应用转化成为学生个体的学习经验.在探究四部分,教师组织学生类比偶函数的定义得奇函数的定义,在此过程中,知识发生

了迁移.概念应用部分的例题是对函数奇偶性的简单应用,问题 1 和问题 2 对学生应用所学知识解决问题的能力要求更高.事实上,聚焦学科内容、具有挑战性的学习任务更需要学生有综合的能力和创新的意识,可以更好地促进学生的深度学习.例如情境引入部分的问题 5 其实是为拓展思考部分的学习任务埋下伏笔.总共两个任务:(1)根据一半图象作出另一半图象;(2)添加项使其变成四种函数中的任意一种.根据函数奇偶性,任务(1)不难完成.任务(2)的情境开放且答案不唯一,精彩纷呈的答案更能体现学生在课堂教学中的主体地位.学生解决问题的手段也是多样的,既可以借助 GeoGebra 画图寻找答案,也可以从“数”的角度去思考,学生综合运用本节课所学知识完成任务的过程就是高层次的迁移和应用.学习内容的深刻性与丰富性,学生学习的主动性、积极性都在完成任务的过程中得以体现.而迁移与应用也是深度学习的特征之一.

3 结语

通常认为,深度学习具有以下一些特征:联想与结构、活动与体验、本质与变式、迁移与应用.在概念教学中如何促进学生深度学习的发生?教师可以通过创设恰当的问题情境唤醒学生以往学习经验;通过教学活动使经验得到提升和结构化;通过设置合理的探究活动引导学生充分展开活动与体验,主动进行知识建构;通过设计有效的提问让学生的思维外显,帮助学生理解数学的本质;通过设计具有挑战性的学习任务引导学生完成学习任务,促进知识的迁移与应用.以上策略均能促使学生的深度学习真实有效地发生.广大教师应该深刻认识到概念教学的育人价值,明确概念教学的出发点和目标方向并设计好探索路径,以促使学生走向深度学习并发展其数学核心素养.

参考文献

[1] 张红.重视概念学习,彰显数学本质[J].基础教育论坛,2014(8):21-22.
[2] 侯斌,万金珠.践行局部探究,落实“三个理解”[J].福建中学数学,2020(9):15-17.
[3] 王荐,王旦.凸显深度学习特征的生物学教学策略[J].中学生物教学,2022(1):14-17.

(上接第 28 页)

从问题 1 至问题 8,始终遵循了问题变式的层次性和阶梯性,遵循了问题发生的内在关联,符合学生已有认知能力,满足了学生求知的需求,引领着学生逐步进入深度思考、深度学习.在问题 8 探究结束后,设置了一个与此节课相关性极强的问题 9(2020 年成都中考试题):

问题 9 如图 7,在平面直角坐标系中,已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$,$B(4,0)$ 两点,与 y 轴交于点 $C(0,-2)$.(1) 求抛物线的函数表达式;(2) 点 D 为第四象限抛物线上的一点,连结 AD,BC 交于点 E,连结 BD,记 $\triangle BDE$ 的面积为 S_1,$\triangle ABE$ 的面积为 S_2,求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.

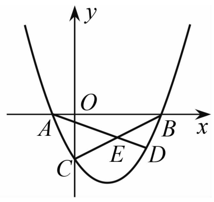

图 7

问题 9 是本节课所学方法的应用,更是对内容理解的升华.这一成都中考题的解答,让学生感知复杂题目的产生就是立足于基本方法、基本技巧.将面积之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值问题转化为 $\frac{AE}{ED}$ 的最大值问题,从而回到了与问题 8 类似的问题.通过对问题 9 的交流分享,及时反馈学生对本节课知识方法的理解与掌握,学生真正进入了深度学习.随着一个个生长性问题的提出和解决,在探究过程中学生思维得到了培养,能力得到了提升.课堂最后可以试着让学生提出一个二次函数背景下的最值问题,并尝试解答.

美国教育心理学家加涅曾指出“教学设计必须以帮助学习过程而不是教学过程为目的.”[2] 让“生成式问题串”引领、驱动课堂教学,只是教师优化教学设计的一种重要方式和途径.在建构主义理论指引下,在生成性视野中,教学的过程是研究、倾听、对话的过程.因此,在重视问题串设计的同时还要让课堂教学实施走向民主化、开放化,重视对学生学习的关注、对过程的关注,培养学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力.

参考文献

[1] 波普尔.猜想与反驳——科学知识的增长[M].傅季重,纪树立,周昌忠,等译.上海:上海译文出版社,1986:317-318.
[2] 加涅,韦杰,戈勒斯,等.教学设计原理[M].王小明,庞维国,陈保华,等译.上海:华东师范大学出版社,2007:4-5.