思维提升:本真数学教学的课堂价值取向

——函数的恒成立与存在性问题研究教学实录与反思

王晓东 (江苏省启东市中小学教师研修中心 226200)

作者简介:王晓东,江苏启东市人,江苏省数学特级教师,教授级中学高级教师,江苏省教学成果奖基础教育特等奖获得者,江苏省333高层次人才,南通市第一梯队名师培养对象,南通市高中数学学科基地指导专家.发表专业论文80多篇,曾主持和核心参与五个省级课题的研究,在长期的教学实践中,确立本真数学教学主张,目前主持江苏省"十二五"教育科学规划课题"高中数学本真教学区域范式研究".

1 基本情况

2013年10月,笔者以"本真课堂范式的研究"为主题,面向课题组区域成员和启东市数学教师上了一堂高三"函数的恒成立与存在性问题"的研究课.

授课对象 学生来自四星级高中普通班,基础较好,有一定的推理能力及研究能力,能在教师的引领下自主探究和思维建构.

学习目标 (1)理解有关恒成立与存在性问题成立的充要条件,掌握解决此类问题的基本技能;(2)体验函数思想、分类讨论思想、数形结合思想、转化与化归思想,提高分析和解决问题的能力.

教学重点 理解恒成立与存在性问题的实质.

教学难点 利用函数的性质,通过转化,化归至最值问题或值域问题,以此来处理恒成立与存在性问题.

2 设计理念

审视现实的数学课堂,基于功利性的需要和认识的偏差,课堂中去数学化现象十分普遍,快速度、大容量、高难度的训练让学生不能慢中求悟、悟中求道,更不能从题目中提炼出有价值的问题并加以思考和探究,所以数学学习往往带给师生艰辛、苦涩、失败的感觉.

本真数学教学倡导教学的自然合理、朴实无华,提倡通过学习主体性的构建,通过观察、分析和探究进而实现思维的提升.本节课力求追寻数学教学的本原意蕴,不求特别新颖的问题情景,通过在课堂上设计题根问题,然后就此问题进行"联""串""变",通过层层问题的设置,点燃学生的思维火花,循序渐进地发展学生的数学素养,最终达到对问题本质的理解和掌握.

函数的恒成立与存在性问题,是学生在复习函数和导数后的一个专题,是函数性质的综合应用,涉及到一次函数、二次函数等函数的图象、性质,渗透着换元、化归、数形结合、函数与方程等思想方法,所以本节课将从一次函数出发,然后逐步串发到二次函数、三次函数,用相近的思想方法去解决同一类问题.

3 教学实录

3.1 自然串发,本真梳理

师:在研究函数问题时,我们经常会遇到恒成立与存在性问题,谁能告诉我解决这类问题的方法?

生:好像可以转化为极值问题来解决.

生:好像可以通过分离参数来解决.

师:很好.用上述两种方法能不能解决所有的这一类问题?今天这一节课,我们一起来研究这一类问题的解法,我们从一次函数和二次函数开始梳理.(出示课前要求学生研究的题目)

问题1 已知函数 $f(x)=-\frac{3}{2}ax+4$,对任意 $x\in[1,2]$ 恒有 $f(x)>0$,求实数 a 的取值范围.

师:课前各个小组都进行了研究,下面大家把研究的成果共享一下.

甲组边实物投影展示边讲解：根据单调性，对 a 进行分类讨论，当 $a=0$ 时，恒成立，当 $a>0$ 时，考虑 $f(2)>0$，当 $a<0$ 时，考虑 $f(1)>0$，结果为 $a<\frac{4}{3}$.

生：这么做好像有点烦. 我认为同时考虑 $\begin{cases}f(1)>0,\\f(2)>0\end{cases}$ 即可.

师：为什么？

生：本题的实质是考虑 $[f(x)]_{\min}>0$，而一次函数在闭区间上的图象是一条线段，最小值必然从两端点处取得，所以只需考虑两端点处的函数值为正即可.

师：对吗？

生众：对.

师：如果题目改为"恒有 $f(x)<0$"，我们又将怎么办？

生众：考虑 $[f(x)]_{\max}<0$，即 $\begin{cases}f(1)<0,\\f(2)<0.\end{cases}$

师：看来同学们对一次函数的恒成立问题已经有所掌握，只要结合图象考虑两端点的函数值. 那么，对于二次函数我们又将如何处理.（出示课前的研究题，将问题 1 改编的问题 2）

问题 2　已知函数 $f(x)=x^2-\frac{3}{2}ax+4$.（1）任意 $x\in[1,2]$，恒有 $f(x)>0$，求实数 a 的取值范围；（2）存在 $x\in[1,2]$，有 $f(x)>0$，求实数 a 的取值范围.

师：哪一组来回答第（1）问？

乙组：和问题 1 一样，只要考虑 $[f(x)]_{\min}>0$ 即可，分三类情况进行考虑，即 $\begin{cases}\frac{3}{4}a\leqslant 1,\\f(1)>0,\end{cases}$ $\begin{cases}1<\frac{3}{4}a<2,\\\Delta<0,\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3}{4}a\geqslant 2,\\f(2)>0,\end{cases}$ 得 $a<\frac{8}{3}$.

师：方法应该没有问题，但解三个不等式好像要化费一点时间.

生：可以通过分离参数来解决. 由 $f(x)>0$，可以变形为 $\frac{3}{2}a<x+\frac{4}{x}$，对任意的 $x\in[1,2]$ 恒成立，而 $g(x)=x+\frac{4}{x}$ 的最小值为 4，解不等式 $\frac{3}{2}a<4$ 即得.

师：可行吗？

生众：可行.

师：两种方法都是将恒成立问题转化为函数的极值问题来解决，那能不能用同样的方法来解决第（2）问.

丙组：第（1）问只要考虑 $[f(x)]_{\min}>0$ 即可，第（2）问由 $f(x)>0$，可以变形为 $\frac{3}{2}a<x+\frac{4}{x}$ 对存在 $x\in[1,2]$ 成立，而 $g(x)=x+\frac{4}{x}$ 的最大值为 5，解不等式 $\frac{3}{2}a<5$ 即得.

师：通过上面两个问题的解答，我们能否总结出一些结论来.

生：若 $k>f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow k>[f(x)]_{\max}$；若 $k<f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow k<[f(x)]_{\min}$；若存在 x 使得 $k>f(x)\Leftrightarrow k>[f(x)]_{\min}$；若存在 x 使得 $k<f(x)\Leftrightarrow k<[f(x)]_{\max}$.

生：老师，我有更简单的方法. 由 $f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线，只要考虑 $f(1)>0$ 或 $f(2)>0$ 即可.（多数同学一开始有些迷惑，一会儿便恍然大悟）

师：这是从方程有根的角度得来的，但这只能解决开口向上的抛物线的存在性. 我们是否为这位同学的精彩思路鼓掌？（学生们鼓掌）

师：开口向下的抛物线，用这种方法可以解决 $f(x)<0$ 的存在性问题，此问题留给课后思考.

3.2　借石攻玉，本真探究

师：一次函数和二次函数我们作了研究，能否用同样的方法来解决三次函数问题呢？

问题 3　已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+4$，对任意 $x\in[1,2]$ 恒有 $f(x)>0$，其中 $a>0$，求实数 a 的取值范围.

学生小组进行讨论，教师巡视并指出部分同学的问题.

丁组结合实物投影讲解：

解法 1　用导数法求最值. 由 $f'(x)=3x^2-3ax$，故当 $x=0$，$x=a$ 时有极值，所以有三种情况：$\begin{cases}a>2,\\f(2)>0,\end{cases}$ $\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 2,\\f(a)>0,\end{cases}$ $\begin{cases}a<1,\\f(1)>0.\end{cases}$ 解得 $a<2$.

解法 2　由 $f(x)>0$ 分离参数得 $\frac{3}{a}<x+$

$\frac{4}{x^2}$，令 $g(x)=x+\frac{4}{x^2}$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=2$，所以 $g(x)_{\min}=3$，即 $a<2$.

师：丁组的同学们做得很好.但我刚才在巡视的过程中发现部分同学对用导数求极值还不太熟练，希望大家要多加训练.

师：这道题和前面两道题的解法一样，都是通过最值来解决恒成立问题.为了进一步加深对三次函数的理解，同学们是否对其进行一下变式？

生：变式 1　已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+4$，存在 $x\in[1,2]$，有 $f(x)>0$，其中 $a>0$，求实数 a 的取值范围.

师：同学们自己都会变式了，那么我们就来解一下.

生：(笑，然后埋头做题，很快有人报出了答案) $a<\frac{10}{3}$.

师：还有更多的变式吗？

(学生沉默，个别同学摇头)

师：刚才大家都集中在一个函数的研究，有时，我们可以把视野放远一些，我们可以研究两个函数，解决他们的存在性和恒成立问题.

生(恍然大悟)：见过这类题.

师：我给同学们来一个变式，大家看看怎么样？

变式 2　已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+4$，设 $g(x)=ax^2+4(a>0)$.

(1) 若对任意 $x\in[1,2]$ 恒有 $f(x)>g(x)$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若对任意 $x_1\in[1,2]$，$x_2\in[1,2]$，都有 $f(x_1)>g(x_2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

师：大家看一下题目，两问之间有什么不同？

生：第(1)问中的 x 值是相同的，第(2)问中的 x 值不一样.

师：好，大家看出了不同，那么对求解有无影响？和前面讲的内容有无联系？

生：第(1)问我们可以转化为一个函数来研究，如令 $h(x)=f(x)-g(x)$，下面研究 $h(x)>0$ 恒成立即可.

师：这种方法是可以的.我们往往把其中的一个函数移项，构造一个新的函数，然后利用求导求函数的最值来解决.那第(2)问呢？

生：我不太确定，由于 x 值的不同，是否单独研究两个函数？

师：大家帮他一下.

生：我认为他的思路是正确的.由值域关系，只要研究 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$ 即可.

师：我是否可以这样理解，在题意的条件下，如果有 $f(x_1)>g(x_2)$ 恒成立，则需考虑 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，如果 $f(x_1)<g(x_2)$ 恒成立，则需考虑 $f(x)_{\max}<g(x)_{\min}$.

生众：正确.

师：小组一起来把这个问题解决了.

(同学们以小组为单位进行求解)

师：这个问题的定位是任意性问题，如果变为存在性问题，我们应该又多了一种变式，关于本题的解答及有关的变式请以小论文的形式上交.

3.3　联中见源，本真反馈

师：刚才和同学们一起研究了恒成立与存在性问题，大家对此有了新的认识，下面通过自我编题，一起来回顾一下本节需要我们掌握的东西.

问题 4　请根据题意自我编写题目，并进行解答！(在空格____处填写“任意”或“存在”)

已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+4$，$g(x)=ax^2+4(a>0)$.

(1)____$x_1\in[1,2]$，____$x_2\in[1,2]$，有 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立；

(2) 在(1)的情况下，求实数 a 的取值范围.

学生以小组为单位进行编题解题，并伴有讨论.教师巡查，并不时参与讨论.

师：各个小组都进行了自我编题.我看了一下，总共有四种情况，哪组出来说一下.

生：第一种：填 $\exists$，$\exists$，只需考虑 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$；第二种：填 $\exists$，$\forall$，只需考虑 $f(x)_{\max}>g(x)_{\max}$；第三种：填 $\forall$，$\forall$，只需考虑 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$；第四种：填 $\forall$，$\exists$，只需考虑 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$.

师：这四种情况实质就是我们本节课研究的主要内容.

师：最后再请大家对这四种情况整理一下思路和解法.

3.4　全课小结，布置作业(略)

4　回顾与反思

4.1　本真数学教学的追求

“本真数学教学”的含义就是尊重客观，适应规律，以人为本，教人求真. 这里的“本”指的是本质的“本”，根本的“本”，本源的“本”，指的是客观实际，指的是人，是指以学生的发展为本；这里的“真”指的是真实，即规律，指的是课堂教学的真实.

数学的育人本分，是培养学生的思维习惯，发展理性精神. 从这一点上来讲，数学是一个慢中求悟、自然生成、不断探索的过程. 所以，本真数学教学力求平淡地、简约地、扎实地、轻松地教数学，以学生已有的知识为起点，朴素地追问数学问题，自然地逼近数学本质，以此从获得知识到拥有智慧.

本节课没有花哨的教学手段，没有空泛的教学活动，只有教师关键处的点拨，师生间思维的相互交流，整节课充满了对学生研究习惯的关注. 本节课中，由一次函数到二次函数，再到三次函数的研究，从简单数学模型的开始串发，无不体现了对学生的尊重，然而目标清晰，始终不离恒成立和存在性两种模型的问题解决，这种课堂才是数学应有的课堂，这样的思考才是体现了数学本质的思考，这样的思维才会是有价值的提升.

4.2　本真数学教学的手段

数学教学就是思维活动的教学，数学思维的形成源自对有关知识内容的整合，源自由彼及此，由此及类的拓展，源自在形与质的异同的识别中反思，采用最合适的手段让学生理解、把握数学概念的最核心内容.

本真数学教学遵循最近发展区理论，倡导从学生已有或熟知的内容出发，组织学生自主探索、合作讨论，交流展示，让学生在探究活动中领悟数学变换的魅力，发展推理能力和运算能力. 经验告诉我们，经常性的发现和创造会极大地提升学生学习数学的信心和兴趣，同时也会使得学生的创造性思维得到长足的发展.

本节课中，问题的串发是一个熟悉的一次函数模型，当以此为基础而构造的二次函数、三次函数和两个三次函数呈现于眼前的时候，学生直观看到了其中的变与不变，正因为这些变与不变，吸引了学生探究的更大热情，在问题 3 的变式 2 中，两种完全不同的知识结构也会让学生最大限度地防止解题中的误区，而当开放式的问题 4 得以求解的时候，本节课的教学目标也得到了最大可能地完成. 这种基于熟悉模型的“串”“联”“变”是开放的思维形式和收敛的思维形式完美结合的典范，也是本真数学教学的必用手段.

4.3　本真数学教学的价值

数学学习需要积极的思维活动及对结果的正确验证，这会对学生的学习产生积极影响. 没有思维就没有数学，学生的思维活动是课堂的灵魂，思维的深度是在师生思想的交锋中不断加强的，思维有交锋、有深度，课堂才有活力和灵气，也只有在判断真假、你争我论中理性精神才能得以发展，能力才能得以提升，兴趣才能得以提高. 本真数学教学采用的习题串发可以发挥习题的功能，促进技能性思维定势的正迁移，提高教学的有效性. 采用的借石攻玉可以使学生获得对概念的多角度理解，进而建立新概念与已有概念的本质联系；采用的联中见源，可以展示知识的发展和形成的过程，从而理解知识的来龙去脉，形成知识网络，加深对问题本质的理解.

返璞归真，贴近学生实际，尊重学生的认知基础，这是让学生获得体验、产生学习数学积极情感的重要途径. 只有学生对学习数学有积极情感，才会主动探索，积极思考. 本真数学教学采用在具体的问题解决中，不断进行或猜测、或实验、或类比、或归纳、或联想、或检测的多种手段，从而拓展了思维的宽度，也会让学生建立起有效的数学解题模型，为后续学习增添动力.

教师课堂上所做的一切，最终都得由学生自己去实施. 不管教师课堂上讲了多少，讲得多巧，如果学生不能面对具体问题，教学是无效的. 本真数学教学遵循课堂教学的过程，是让学生掌握知识的过程，更是帮助学生解决问题、掌握解决问题的思路与方法的过程，所以教师的作用是在关键处引发学生提出新的问题，只有“问题不止，思考不断”，这样的课才能教给学生一生有用的数学，才能为学生奠定一生有用的学习研究习惯.

总之，思维的提升是数学课堂教学的价值，为此需要数学教学回归本真，愿这样的思考为数学教学带来别样的精彩.